

# Mimer Akademiens arbete med barnens matematikutveckling

Ann S Pihlgren Elisabeth Wanselius

## Matematikdidaktik – hur förbättrar vi resultaten?

I olika undersökningar de senaste 25 åren visar det sig att de svenska barnen halkar efter i sina matematikkunskaper. Det blir inte bättre, det blir sämre, tyvärr. Det är svårt att skönja vad orsaken är, men en förklaring ligger troligen i att matematiken i Sverige under årens lopp har blivit ett ämne, där lärarens didaktiska roll försvunnit mer och mer. Själva "utlärandet" av matematikens innehåll har lämnats åt läroboken. För liten hänsyn har tagits till elevernas förståelse av matematiken, av matematikens "själ". Internationella undersökningar har under en längre tid visat att de svenska barnen är duktiga på att lösa algoritmer, något som man kan träna upp genom övning i träningsböcker. Men de internationella undersökningarna visar också att de svenska barnen har betydligt svårare när det handlar om att "tänka matematisk", jämfört med sina internationella studiekamrater.

Vårt utvecklingsarbete i matematikämnet startade i att försöka hitta metoder för att få eleverna att verkligen förstå matematiken "själ" och att lära sig att tänka matematiskt, att kunna avslöja den matematiska koden. Arbetet ledde till nya arbetssätt och material, som byggde på att låta eleven systematiskt värdera sin matematiska kunskap och sina resultat och att därifrån tillsammans med läraren bedöma hur den fortsatta kunskapsutvecklingen skulle se ut. Samtidigt utvecklade vi metoder för att kunna fördjupa det matematiska tänkandet. Det är det praktiska utfallet av detta arbete som presenteras här.

## Teoretisk idé

Innan de praktiska utfallen presenteras vill vi kort redogöra för två viktiga teoretiska utgångspunkter i vårt arbete: kontextens (omgivningens) påverkan och kunskapens olika delar. Båda dessa idéer kommer kortfattat att beskrivas här nedan, innan deras praktiska konsekvenser beskrivs i form av vår arbetsgång.

## Kontextens påverkan

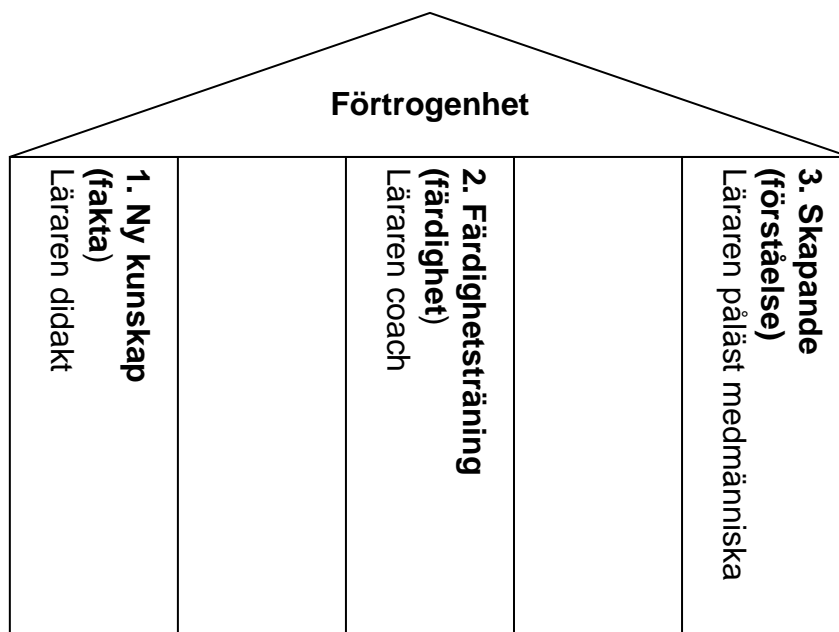
En central idé i vårt arbete är att alla signaler som omger eleven är viktiga för VAD eleven ser som viktigt och HUR eleven kommer att uppfatta situationen, ämnet och kunskapen om ska läras. Det betyder att det blir viktigt i arbetet att hjälpa eleven att "avslöja" de bakomliggande systemen och deras mekanismer. Att ha s.k. neutrala provsituationer, där pedagogen kontrollerar att stoffet lärts in och där pedagogen själv "dömer av" om den studerande klarar sig eller inte, är knappast befrämjande för lärandet av matematik. Det visar bara om läraren lyckats med sin undervisning. En bra uppföljning ska göras så, att lärandet förankras och så att eleven förbättrar sin förståelse och sina prestationer. Att själv delta i bedömningsprocessen är nyckeln till framgångsrikt lärande. Att delta i diskussioner om hur olika matematiska slutsatser och lösningar har uppstått förmedlar dels en förståelse för matematikens inre kärna, dels att matematik kan uppfinnas och vidareutvecklas.

## Kunskapens olika delar

Läroplanen beskriver kunskapens olika moment i fyra begrepp: fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet. Dessa begrepp hör samman men är ändå olika. Mortimer

J. Adler, amerikansk pedagogisk filosof och grundare av The National Paideia Center (se [www.paideia.org](http://www.paideia.org)), en organisation för pedagogikutveckling som Mimer Akademin samarbetar med, presenterar en liknande idé om kunskapens olika delar.

Adler delar upp kunskapen i tre grundläggande pelare:



1. Den först pelaren handlar om inhämtande av ny kunskap. Varje ämne innebär att eleven måste inhämta ny kunskap, sådant som läraren vet är väsentligt och behöver lära eleven. Här fungerar läraren i en mer traditionell lärarroll, som didakt, och lär ut det som är viktigt att kunna för fortsatt utveckling i ämnet. I matematik kan det t.ex. handla om att eleven genom lärarens föreläsning, planerade experiment eller liknande, förstår hur multiplikation går till eller vad procent rör sig om. Delvis påminner denna kategori om den svenska läroplanens kategori "fakta".
2. Nästa pelare rör färdighetsträningen och motsvarar läroplanens kategori "färdighet". Här tränas det som eleven förstått i pelare 1. Om man förstått hur multiplikation tekniskt är uppbyggd och går till, behöver man öva multiplikationstabellen. Om man förstår principerna bakom procent behöver man träna procentberäkning. Läraren övergår här från att vara didakt till att bli coach, en hjälpare som plockar fram rätt material, "hejar på" och ser till att eleven tränar på ett effektivt sätt.
3. Den tredje pelaren rör förståelsen av ämnets inre idé och motsvarar ungefär läroplanens kategori "förståelse". Detta är en skapande pelare, där det man lärt sig i pelare 1 och tränat i pelare 2 kan användas för att tänka nytt, skapa matematik. Adler menar att denna pelare är den mest eftersatta men också den nödvändigaste om eleven ska kunna utveckla sitt tänkande. Här har vi i skolan inte särskilt stor erfarenhet av hur man ska arbeta, det är också något som slår igenom i de internationella undersökningarna. Lärarrollen här kan kännas ovan och annorlunda. Här kan läraren inte längre ge "rätt svar", eftersom vi rör oss med frågor som diskuterats genom mänsklighetens historia inom matematikämnet. Det kan t.ex. röra sig om varför vi som människor behöver talsystem, varför vi har behov av matematisk struktur, vad som går att

räkna ut och vad som inte går att räkna ut. Det finns inget "rätt" svar. Däremot finns det många möjligheter, och mer eller mindre välunderbyggda hypoteser. Tillsammans kan vi granska och utvärdera dem. Det är grunden till våra Sokratiska samtal, som du kan läsa mer om längre ner i denna artikel.

Ovanpå de tre pelarna vilar ämnets verkliga kärna, förtroendet i ämnet.

Samtliga delar måste finnas med för att eleven ska kunna utveckla verklig kunskap i matematikämnet.

## **Praktiskt matematikarbete i Elisabeths klassrum**

### **Individuell del och färdighetsträning**

Varje månad gör eleverna i åk 3-5 en diagnos som tar upp olika delar av matematiken, exempelvis de fyra räknesätten, bråk, skala, problemlösning och enheterna. Det är 30 frågor på varje diagnos. När eleverna enskilt har gjort diagnosen, rättas den av läraren. Diagnosen sätts sen in i en pärm där varje barn har en flik. När eleverna sen ska välja matematikarbete inför veckans planering, tittar de på sin diagnos för att minnas vad de behöver träna på. Efter att de har bestämt vilken del de vill öva, kommer de till läraren för att meddela eller diskutera vad nästa planeringsperiod ska innehålla för arbete för dem i matematik. Läraren skriver ner alla elevers namn och önskemål på en lista och kontrollerar att hon har pratat med alla. I matteskåpet, där allt material för matematiken finns, väljer man så ut vad varje barn ska använda. Det kan vara böcker eller annat material att jobba med, som passar elevens nivå och inlärningsstil, för att eleven ska nå sitt uppsatta mål. Det händer att eleverna själva säger till vilken bok de vill öva i som passar deras sätt att tänka och som de gillar lite extra. Det kan även vara egna önskemål om material att jobba med. Detta är den individuella delen där eleven jobbar mot sina egna mål och efter den utvecklingsplan som har skrivits. Det är viktigt att eleverna hela tiden kan se vad som är nästa steg för dem att utveckla.

De äldre eleverna gör diagnoserna för årskurs 7 och 9 för att se vad de behöver öva på och vad som är nästa steg för dem. I övrigt följs samma princip.

### **Ny kunskap**

Efter det att eleverna har gjort sina månadsdiagnoser, sammanställs dessa för att läraren ska se hur resultatet ser ut för hela gruppen. Då ser läraren vad det är alla (eller många) elever redan kan och vad alla (eller många) saknar, som vi gemensamt behöver gå igenom och öva på. Detta blir lärarledda genomgångarna för månadsens arbete tillsammans i gruppen. Vid dessa lektioner hör alla samma sak och jobbar med samma del av matematiken. Detta kan ju också ske på olika nivåer beroende på gruppens behov. Det är viktigt att variera sitt sätt att gå igenom olika saker, t.ex. genom film, lekar, laborationer, spel men också regelrätta lärarledda genomgångar. Det är viktigt att eleverna får öva på den nya kunskapen för att befästa den. Därför är det bra att ha en uppgift eller övning efter genomgången för att de ska få tänka efter själva och diskutera med varandra, så att de sätter ord på det de har lärt sig.

### **Exempel på lektion om ny kunskap i åk 4**

Eleverna i åk 4 skulle ha en lektion om vikt. Vi diskuterade vad begreppet betyder och vilka enheter som finns. Efter det fick de i uppgift att ta reda på en del fakta kring

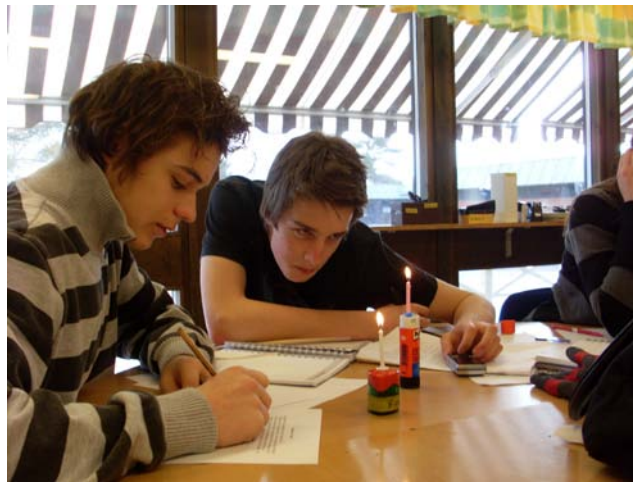
de olika enheterna, t ex hur många gram som går på ett kilogram och så vidare. Förutom detta fick de i uppgift att hitta något som väger 10g, 100g osv. Till sin hjälp hade de flera olika vågar och både klassrummet och utemiljön till att hitta material. Eleverna fick enskilt olika uppgifter, men de hade möjlighet att diskutera med varandra om de ville och behövde. De kunde även fortsätta att arbeta med dessa uppgifter på sitt pass för eget arbete, om de inte blev klara på lektionen. Lektionen därefter fick det en uppgift, där de i grupp skulle packa en väska. De skulle resa till Alperna, och de skulle flyga dit. Deras bagage fick inte överstiga 20kg och handbagaget fick väga 5kg. Vad skulle de packa? Det var ett febrilt vägande och diskuterande av vad olika saker väger och vad man behöver ha med sig. De hade tillgång till olika vågar för att kunna ta reda på vad olika saker väger. Och en del fantasi för att hitta saker att väga! Till exempel fick en meterlinjal fungera som en längdåkningskida. Även denna uppgift kunde de, som inte hann klart, fortsätta med på passen för eget arbete.



### **Exempel på lektion i åk 8**

Eleverna i åk 8 skulle jobba med funktioner. Vi gick igenom vad en funktion var och diskuterade hur man skrev en funktion utifrån olika data och hur man ritar in den i ett diagram. Vi diskuterade även hur man skriver en funktion utifrån en graf. Som praktisk övning till detta fick de göra en egen funktion till ett tårtljus. De arbetade i par. De fick ta tid och mäta ljuset vid olika tidpunkter. Hur de gjorde detta var lite olika i de olika paren. De fick bestämma själva hur de skulle ta tid och mäta ljuset, huvudsaken var att de var överens. Skulle ljuset släckas emellan när de mätte eller mätte de på sidan av ljuset samtidigt som det brann? Blev det någon skillnad om man arbetade på det ena eller andra sättet? Hur ofta skulle man ta tid? Eleverna jobbade väldigt engagerat och försökte få till sin graf och funktion. Det var helt klart lättare att göra grafen och tabellen än att ta reda på hur funktionen skulle se ut. Att bestämma funktionen hade man kanske kunna göra vid ett senare tillfälle när de var lite mer insatta i funktionsarbetet. Men de fick en förståelse för hur en graf hör ihop med ett förlopp och hur det hör ihop med funktionsbegreppet. Vid ett senare tillfälle fick de göra en graf till volymen av ett konformat (uppochnervänd) glas och jämföra med ett rakt glas, dvs. de fick fylla ett glas med vatten, mäta höjden kontra volymen,

och se hur graferna skilde sig åt. Där behövde de bara försöka få fram funktionen på det raka glaset, men det var också rätt svårt tyckte de, men roligt!



### **Skapande, kommunikation och Sokratiska samtal**

För att se vad man ska ha för nytta av all sin färdighetsträning och för att se hur det ser ut i livet behöver man ha problemlösningssuppgifter där eleverna måste sätta samman all kunskap de har för att klara av att lösa problemen. Det är ju det som behövs i "verkligheten". Där står inte färdigt vilket räknesätt eller knep man ska använda sig av för att lösa ett vardagligt problem. För att eleverna ska lära sig att kommunicera matematik med andra krävs att man planerar in faktiska tillfällen för detta. Vi jobbar med sokratiska samtal i matematik för att eleverna ska gå in djupare på och argumentera för sina tankar och idéer inom matematiken. Detta är en del som också tilltalar de elever som kanske inte har så lätt för färdighetsträningen utan är mer "språkligt lagda". Här kan de lyssna och delta utan att behöva formulera sig i matematiks skrift. Arbetet kan också ske i form av gruppuppgifter, där eleverna tillsammans i grupper löser olika problem. Det kan var problem med endast en tänkbar lösning men det är också viktigt att man presenterar problem där det finns flera lösningar, för att det inte ska finnas ett "rätt svar" man är ute efter. Det gäller att tänka efter egen förmåga och tillsammans utveckla tänkandet och förmågan.

### ***Exempel på sokratiskt samtal i matematik med skolår 4 och 5***

Som sokratiskt samtal i matematik hade vi en kort text om "Kejsaren av Mesopotamien", som skulle skicka olika saker till ett annat kejsardöme, men som tyvärr hade ett annat tal och skriftspråk. Hur skulle han då lösa problemet att vara säker på att allt som han skickat garanterat kom fram ordentligt? Han var tvungen att skicka med ett brev som talade om hur mycket och vad han hade skickat i sin last, så att sedan den andra kejsaren kunde kontrollera detta och se att allt fanns med. Eleverna fick som ingångs fråga "Hur skulle du ha gjort om du hade vart kejsaren?". De fick enskilt fundera över detta en stund och kort skriva ner sina tankar i sin sokratiska samtalsbok. Efter detta delades de in i grupper där de sedan skulle försöka hitta på vad som skulle stå i brevet och hur de skulle göra för att lösa problemet. Efter att de funderat på det, diskuterat och skrivit ner sitt förslag, samlades vi igen för att gå igenom de olika förslagen och se vilka för- och nackdelar som olika lösningar hade. Efter noggrant övervägande kom de fram till ett förslag och gjorde sedan ett gemensamt brev. Det skickades till den andra gruppen: årskurs 4

skickade alltså till årskurs 5 och tvärt om. Sedan fick de lösa varandras brev och se om de kunde avkoda vad som skulle ha funnits i lasten.

Samtalet tog sammanlagt cirka tre lektionstillfällen. Efter mitt första samtal med årskurs fem insåg jag snabbt att språket i texten var alldeles för svårt och samtalet mer kom att handla om vad som egentligen menades med olika ord än om att lösa själva uppgiften. Så till mitt nästa samtal med årskurs fyra gjorde jag om texten så, att språket inte skulle vara ett hinder för uppgiften. I ett annat samtal skulle självklart ordkunskapen ha kunnat diskuteras, men i det här fallet tog det fokus från det jag ville att de skulle fundera på, nämligen det matematiska problemet. Samtalet var mycket uppskattat av eleverna, även om de till en början tyckte att det var väldigt svårt. När de väl kom igång och hade varandra som stöd så gick det lättare. Allra stoltast var de nog när den andra gruppen hade kommit fram till vad som fanns i den last som de själva hade skickat. Att diskutera detta tillsammans blev ju lite av ett efterseminarium men också ett roligt avslut på själva samtalet.

### ***Ett sokratiskt samtal med åk 8***

Med de äldre eleverna handlade ett av samtalen om geometriska figurer. De fick ett papper med flera olika geometriska rymdfigurer på. Den inledande frågan till gruppen var att de skulle välja vilka figurer de tyckte var mest lika eller mest olika. Eleverna fick diskutera figurernas olika egenskaper, likheter och skillnader. Det var intressant att höra hur olika de kunde se på olika figurer till en början, men att de sedan kunde lyssna och förstå andras sätt att tänka. Det diskuterades bland annat vilka figurer som är lätta att stapla och vilka man helst skulle vilja bygga olika saker med. Senare i samtalet var en av mina frågor: "Vilken av figurerna är mest "du"?" Där fick eleverna argumentera och koppla sig själva till figurerna och deras egenskaper. Alla elever motiverade sitt eget val och de som inte riktigt kom på något motiv fick hjälp av de andra. Diskussionen hamnade till slut i vad som är en "mall" för hur man som tonåring ska vara. Är det något att sträva efter eller ska man försöka gå sin egen väg? Eleverna var mycket engagerade och delade med sig av sina tankar och erfarenheter. Detta samtal har jag även haft med eleverna i åk 4 och 5, men där var det svårare för eleverna att tänka sig det mer abstrakta i "att vara en figur". De såg figurerna mer kopplade till kroppsform eller vad de tyckte var fint.

### **Uppföljning av matematikkunskapen**

En viktig del i arbetet handlar om att ta sig tid att diskutera resultat och mål med varje elev. För eleven handlar det om att med jämna mellanrum få ett tydligt svar på frågorna: "Vad kan jag?" och "Hur ska jag nu gå vidare?". Det kan tyckas som ett tidskrävande moment, och måste planeras in på lektionstid. Det är dock ett förvånansvärt starkt utvecklingsverktyg, åtminstone om bedömning och planering sker i samspel mellan läraren och eleven. På så sätt är det att se som en tidsinvestering – när eleven förstår vad den kan och vad nästa steg innebär, kommer hon/han arbeta vidare på egen hand i snabbare takt.

### ***Exempel på elev- och lärardiskussion***

Jag satt mig ner med en elev i åk 8, Elin (fiktivt namn), för att diskutera hennes nuläge och mål i matematik. Just detta tillfälle var en del av förberedelserna inför utvecklingssamtalet. Elin hade fyllt i sin ämnesutvärdering genom att skriva vad hon tyckte gick bra för henne i matematik och vad hon ville förbättra. Hon hade som mål från föregående år att delta mer muntligt på genomgångar och vid andra tillfällen, för

att öva på att argumentera för sitt tänkande och reflektera över olika lösningsförslag. Hon skulle även utveckla att skriftligt med matematiskt språk genom att förklara hur hon löser sina uppgifter. Detta tyckte hon att hon hade blivit bättre på under tiden som gått sedan förra utvecklingssamtalet. Hon ville nu, i det kommande utvecklingssamtalet, visa två uppgifter i sin portfölj, som belyste skillnaden mellan hennes sätt att lösa uppgifter nu och hennes sätt att lösa dem tidigare. Hon tyckte också att hon hade deltagit mer på genomgångarna nu, vilket jag höll med henne om. Hon hade gjort stora framsteg på detta område, genom att nästan varje genomgång delta aktivt på lektionen. Genom att i grupparbeten se till att hon fick höra hur alla andra tänkte, kunde hon själv ta ställning till när andra presenterade bra förslag och när hon ville argumentera mer för sitt eget förslag. Elin hade under perioden även bett om hjälp för att bli tydligare i sitt sätt att beskriva hur hon tänker skriftligt och hon hade tagit emot de tips och förklaringar hon fått.

För att bli bättre hade Elin själv nu som förslag att hon skulle fortsätta att jobba med diagnoserna som testar målen i skolor 9 ("Förredd för nationella proven", se [www.mimer.org/Norna](http://www.mimer.org/Norna)). Hon angav som skäl att: "Det motiverar mig att jobba med det jag inte kan och då kommer jag lära mig det bättre". Hon hade så bra resultat på de nationella diagnoserna för årskurs 7, att de inte visar vad hon behöver öva på, bara vad hon kan. Hon ville, efter att redan ha testat taluppfattningsdelen och numeriska räkningsdelen och övat extra på division, som hon ansåg att hon behövde repetera lite, testa sannolikhetsdelen för där kände hon sig osäker på vad hon kunde.

För mig som lärare fanns bara kvar att bekräfta hennes bedömning och hennes förslag till fortsatt arbete och säga att jag skulle hjälpa henne med uppgifter vartefter hon såg vad hon behövde öva på, visa på bedömningsmatriser och strävansmål för matematiken, så att hon ser vad hon kan öva på framöver. Plus att ge en hel del beröm förstås!